$$P(\lambda) \xrightarrow[\text{του χρόνου}]{\text{στη μονάδα}} P(X=x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

15/11/16.

Σύστημα Εξυπηρέτησης: Θεωρώ σύστ/μα εξυπηρέτησης, πελάτες φτάνουν κ' ο αριθμός των πελατών στη μονάδα του χρόνου περιγράφεται απ' τη Poisson με λ δηλ ο ρυθμός άφιξης είναι λ-πελάτες στη μονάδα του χρόνου. Οι πελάτες εξυπηρετούνται από έναν υπάλληλο. X_n: η σ.δ. που περιγράφει τον αριθμό των πελατών που είναι μέσα στο σύστ/μα εξ/σης αμέσως μετά το τέλος της εξυπηρέτησης του n-οστού πελάτη.

(i) Να αιτιολογηθεί πλήρως αν είναι Μαρκ. Αλ.

(ii) Να βρεθεί ο πίνακας μεταβ. P όταν ο χρόνος εξυπηρέτησης είναι σταθερός κ' ίσος με t χρον. μονάδες

(iii) Να βρεθεί ο πιν. μεταβ. P όταν ο χρόνος εξυπηρέτησης περιγράφεται από μια διακριτή τ.μ. T με δυνατές τιμές $t_1, t_2, \dots, t_m$ κ' αντίστοιχες πιθανότητες $p_1, \dots, p_m$.

(iv) Όταν ο χρόνος εξυπηρέτησης περιγράφεται από μία συνεχή τ.μ. με συνάρτηση πυκνότητας πιθ. $b(t)$.

(v) όταν $b(t) = \mu e^{-\mu t}$, $t \geq 0$ να προσδιοριστεί ο πίνακας μετάβασης κ' να βρεθούν οι πιθανότητες σε στατιστική ισορροπία (= οριακές πιθανότητες).

Λύση: σ.δ. σε διακριτό χρόνο με $S = \{0, 1, 2, \dots\}$

$$\underbrace{X_{n+1}}_{\substack{\text{αριθμός πελατών μετά}\\ \text{την εξυπηρ. του}\\ (n+1)\text{-πελάτη}}} = \begin{cases} \underbrace{X_n}_{\substack{\text{όσοι ήταν όταν}\\ \text{έφυγε ο προηγ.}}} + \underbrace{A_{n+1}}_{\substack{\text{όσοι μπήκαν}\\ \text{στη διάρκεια}\\ \text{της εξυπ. (του } n+1)}} - 1, & X_n > 0 \\ A_{n+1} = A, & X_n = 0 \end{cases} \qquad (A_{n+1} = A)$$

$A_{n+1} = A =$ όσοι μπήκαν κατά τη διάρκεια εξυπ. οποιουδήποτε πελάτη.

Άρα έχουμε Μαρκ. Ιδιότητα αφού το X_{n+1} (= μέλλον) εξαρτάται μόνο απ' τον παρόν (= X_n) κ' όχι απ' το παρελθόν ($= X_{n-1} | X_{n-2} | X_{n-3} \dots$). Άρα έχουμε Μαρκ. Αλ.

(ii)

$$
\begin{array}{rr|cccccc|l}
 & & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5\ \dots & \\
X_n=0 \swarrow & 0 & P(A=0) & P(A=1) & P(A=2) & P(A=3) & \dots & & \to X_n = A \\
X_n=1 \swarrow & 1 & P(A=0) & P(A=1) & P(A=2) & P(A=3) & & & \to X_n = X_n - 1 + A = 1-1+A \\
\vdots \quad P = & 2 & 0 & P(A=0) & P(A=1) & \dots & & & \to X_n = 2-1+A \\
 & 3 & 0 & 0 & P(A=0) & P(A=1) & \dots & & \to X_n = \underset{2}{3-1}+A \\
 & 4 & & & & & & & \\
 & 5 & & & & & & & \\
 & \vdots & & & & & & &
\end{array}
$$

επειδή δεν γίνεται $A=-1$

Συμβολίζω με $b_k = P(A=k)$. Άρα ομογενής Μαρκ. Αλυσίδα αφού δεν εξαρτώνται από το χρόνο. Άρα τελικά έχω Μη-διαχ. Μαρκ. Αλ. αφού επικοινωνούν οι καταστάσεις μεταξύ τους. Απεριοδική αφού 0 σε ένα βήμα άρα ΜΚΔ(1, ...)=1.

Χρόνος εξυπ. = σταθ. = t χρ. μονάδες.

$b_k = P(A=k) = P$(να έρθουν κ-πελάτες κατά τη διάρκεια μιας εξυπ.) $= P$(να έρθουν κ-πελάτες σε χρόνο t) $\underset{\text{t: χρονικές μονάδες}}{=} \dfrac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$

(iii) Ο χρόνος εξυπ. είναι μια διακριτή τ.μ. με τιμές: $t_1, \dots, t_m$ χρονικές μονάδες.

$b_k = P(A=k) = P$(να έρθουν κ-πελ. κατά τη διάρκεια μιας εξ.) $\overset{\text{Θεωρ. Ολ. Πιθ.}}{=}$

$= \sum_{T=t_1}^{t_m} P$(να έρθουν κ-πελ. δοθέντος χρόνου εξ. t_i) $\cdot P(T=t_i) =$

$= P(A=k$ κ' $T=t_1) + \dots + P(A=k$ κ' $T=t_m) =$

$= P(A=k \cap T=t_1) + \dots + P(A=k \cap T=t_m) =$

$\cancel{= P(A=k|T=t_1) + \dots + P(A=k|T=t_m) =}$

$= P(A=k|T=t_1)\cdot P(T=t_1) + \dots + P(A=k|T=t_m)\cdot P(T=t_m) =$

$= \sum_{i=1}^{m} \dfrac{e^{-\lambda t_i}\cdot(\lambda t_i)^k}{k!} \cdot p_i$

(iv) $P(A=k) = \int \underbrace{P\left(A=k \;\middle|\; \begin{matrix}\text{χρόνος εξυπ.}\\ t+dt\end{matrix}\right)}_{\text{την ξέρω από Poisson}} b(t)\,dt =$

$$= \int \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} b(t)\,dt$$

(v) $\underset{b_k}{\underbrace{P(A=k)}} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} \overbrace{\mu e^{-\mu t}}^{\text{π.ο.} = [0,+\infty)} dt =$

$$= \frac{\mu\lambda^k}{k!}\int_0^{+\infty} t^k e^{-(\mu+\lambda)t}\,dt = \frac{\mu\lambda^k(\mu+\lambda)^{-(k+1)}\Gamma(k+1)}{k!} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{t^{k+1-1} e^{-(\mu+\lambda)t}}{\left(\frac{1}{\mu+\lambda}\right)^{k+1}\Gamma(k+1)}\,dt}_{\text{σ.π.π. της Γάμμα}} =$$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Κατανομή Γάμμα:}\\ \underbrace{\frac{x^{a-1}e^{-x/\theta}}{\theta^a\Gamma(a)}}_{f(x)},\ x\geq 0\end{array}}$

άρα $\boxed{a = k+1}$, $\boxed{\frac{1}{\theta} = \mu+\lambda}$

άρα το $\int_0^{+\infty} = 1$

$$= \frac{\mu\lambda^k\Gamma(k+1)}{k!\,(\mu+\lambda)^{k+1}} \underset{\Gamma(k+1)=k!}{=} \frac{\mu\lambda^k}{\mu^{k+1}\left(1+\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{\mu^k\left(1+\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}} \Rightarrow \boxed{b_k = \frac{\rho^k}{(1+\rho)^{k+1}}},\ \boxed{\rho = \frac{\lambda}{\mu}}$$

άρα $P = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & \\ & b_0 & b_1 & b_2 & \dots \\ & & b_0 & b_1 & \dots \\ & & & b_0 & \dots \end{bmatrix}$ Πρόκειται για μία μη-διαχ. απεριοδική Μαρκ. Αλυσίδα. Θα εξετάσουμε πότε είναι θετ. επαν. με το αντίστροφο του Θ. Foster λύνοντας το $x = x\cdot P \Rightarrow$

$\Rightarrow (x_0\ x_1\ x_2 \dots) = (x_0\ x_1\ x_2 \dots)\cdot P \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = x_0 b_0 + x_1 b_0 \Rightarrow x_0(1-b_0) = x_1\cdot b_0 \Rightarrow x_0\left(1-\frac{1}{1+\rho}\right) = \frac{1}{1+\rho}\cdot x_1 \Rightarrow \\ \quad \Rightarrow \boxed{x_0\cdot\rho = x_1} \\ x_1 = x_0\cdot b_1 + x_1\cdot b_1 + x_2\cdot b_0 = \frac{1}{\rho}x_1 + x_1\cdot b_1 + x_2\cdot b_0 \Rightarrow \\ \quad \Rightarrow x_1\cdot\left[1-\frac{1}{\rho}b_1 - b_1\right] = x_2\cdot b_0 \Rightarrow x_1\left[1-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\rho}{(1+\rho)^2} - \frac{\rho}{(1+\rho)^2}\right] = x_2\cdot\frac{1}{1+\rho} \Rightarrow \\ \quad \Rightarrow \boxed{x_2 = \rho\cdot x_1} = \boxed{x_0\rho^2} \end{cases}$$

Όμοια ~~[illegible]~~ $\boxed{x_2 = x_0\rho^3}$ $\underline{x_2 \cdot \rho}$

Επομένως ότι $(x_0\ x_1\ x_2 \ldots) = (x_0, x_0\rho, x_0\rho^2, \ldots)$

Άρα αν $x_0 = 1 \Rightarrow x = (1, \rho, \rho^2, \ldots)$

Θα πρέπει $\sum_{i=0}^{+\infty} x_i < +\infty \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k < \infty$

Πρέπει $|\rho| < 1 \Rightarrow \frac{\lambda}{\mu} < 1$

Όταν $\frac{\lambda}{\mu} < 1$ τότε συγκλίνει άρα είναι θετικώς επική.

Αν $\rho \geq 1$ δεν υπάρχει λύση που να ικανοποιεί το αντίστροφο του Θ. Foster, επομένως δεν είναι θετικώς επική άρα οι οριακές πιθανότητες είναι 0.

Στην περίπτωση που $\rho < 1$, ισχύει το Θ. Foster άρα $\pi = c \cdot x = c \cdot (x_0\ x_1 \ldots)$ ώστε $\sum \pi_i = 1$ δηλαδή

$$c \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k = 1 \Rightarrow c \cdot \frac{1}{1-\rho} = 1 \Rightarrow \boxed{c = 1-\rho}$$